

Teoria ergodyczna
WPPT IIIr. semestr zimowy 2008/9
LISTA 2

10/12/08

We wszystkich zadaniach mamy do czynienia z układem (X, μ, T) , gdzie μ jest miarą probabilistyczną, a T transformacją (nie koniecznie odwracalną) zachowującą miarę. T_A, μ_A zawsze oznacza transformację indukowaną i miarę warunkową unormowaną na podzbiorze A . Litera f zawsze oznacza mierzalną funkcję rzeczywistą na X .

Zadanie 1. Niech $A \subset X$ ma miarę różną od 0 i 1. Udowodnij, że jeśli układ (X, μ, T) jest ergodyczny, to układ indukowany (A, T_A, μ_A) również.

Zadanie 2. Wykaż, że jeśli miara ergodyczna ma atom, to masa tego atomu jest odwrotnością liczby naturalnej.

Zadanie 3. Niech $\mu(A) > 0$. Sprawdź, że zmienna losowa „czas wejścia” do zbioru A określona na X wzorem

$$\tau_A(x) = \min\{n \geq 1 : T^n x \in A\}$$

jest mierzalna. Uwaga: bez założenia ergodyczności funkcja ta może przyjmować wartość ∞ (jako minimum zbioru pustego).

Zadanie 4. Wykaż, że funkcja f podnieżmiennicza (czyli $f \circ T \leq f$) jest niezmiennicza.

Zadanie 5. Dana jest dowolna funkcja ograniczona f . Wykaż, że funkcja

$$\bar{f}(x) = \limsup_{n \in \mathbb{N}} f(T^n x)$$

jest niezmiennicza.

Zadanie 6. Niech X będzie przestrzenią metryczną zwartą, a T niech będzie ciągle. Wykaż, że jeśli istnieje tylko jedna probabilistyczna miara borelowska T -niezmiennicza, to jest ona ergodyczna.

Zadanie 7. Liczba rzeczywista $t \in [0, 1]$ nazywa się *normalna*, jeśli w jej rozwinięciu dziesiętnym każdy blok cyfr o długości n występuje z gęstością 10^{-n} . Korzystając z ergodyczności transformacji $z \rightarrow z^{10}$ na zespolonym okręgu jednostkowym \mathbb{T} z unormowaną miarą łukową wykaż, że prawie każda (w sensie miary Lebesgue'a) liczba $t \in [0, 1]$ jest normalna.

Zadanie 8. Na zespolonym okręgu jednostkowym \mathbb{T} z unormowaną miarą łukową λ rozważmy dwie transformacje: $T_2(z) = z^2$ i $T_6(z) = z^6$. Czy układ $(\mathbb{T}, \lambda, T_2)$ jest faktorem układu $(\mathbb{T}, \lambda, T_6)$, czy na odwrót, czy w obie strony?